Laplace-Verteilung und bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel 1 Claudia und Thomas spielen mit dem fairen Würfel. Er soll zweimal nacheinander geworfen werden. Claudia sagt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ im ersten und im zweiten Wurf eine 6 fallen. Hat Claudia recht?

Beispiel 2 In der Jahrgangsstufe 12 eines Gymnasiums befinden sich 20 Schülerinnen und 10 Schüler. Den Leistungskurs Mathematik besuchen 6 Jungen und 5 Mädchen. Wie viele Schülerinnen und Schüler sind in den anderen Kursen?

> **Hinweis.** Bei der Analyse von Stichproben hilft ein *tabellarisches Diagramm.* Darin werden absolute Häufigkeiten von Ergebnissen notiert.

Für die Jahrgangsstufe 12 ergibt sich das Diagramm

	L(eistungskurs)	**G**(rundkurs)	$\sum$
J(ungen)	6		10
M(ädchen)	5		20
$\sum$			

Durch $\sum$ werden die Summen der absoluten Häufigkeiten der Zeilen bzw. Spalten angegeben. Unten rechts wird die Gesamtzahl der Schülerinnen und Schüler eingetragen.

Füllen Sie mithilfe der Tabellenkalkulation des ClassPad die Lücken in der Tabelle.

Aus der Schülergruppe wird zufällig eine Person ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person einen Leistungskurs der Mathematik belegt?

Beispiel 3 Herr Peters hat 20 Werkzeuge in eine Kiste gepackt. Versehentlich griff er dabei dreimal in den Korb mit den fehlerhaften Werkzeugen. Er versucht, die fehlerhaften Werkzeuge zu finden, und zieht nacheinander zwei Stück ohne Zurücklegen. A und B seien die Ereignisse

A : „Das zuerst gezogene Stück ist brauchbar."
B : „Das im zweiten Zuge gezogene Stück ist brauchbar."

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde im ersten Zug ein brauchbares Stück gezogen, wenn man weiß, dass im zweiten Zug ein defektes Stück gezogen wurde?

Lösung von Beispiel 1. A_1 und A_2 bezeichnen die Ereignisse einer Sechs im ersten bzw. im zweiten Wurf.

Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit $P(A_1 \cap A_2)$ des Wurfes einer Sechs im ersten und im zweiten Wurf

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Lösung von Beispiel 2. Die fehlenden Personenzahlen lassen sich mithilfe der Tabellenkalkulation des ClassPad berechnen.

Es sollen die Werte der Spalten **L**, **G** und $\sum$ in die Spalten `A`, `B` und `C` eingetragen werden. Die restlichen Zellen lassen sich aus diesen Werten berechnen, wie die folgende Tabelle zeigt.

	L	**G**	$\sum$
J	6	`C1 - A1`	10
M	5	`C2 - A2`	20
$\sum$	`A1 + A2`	`B1 + B2`	`A3 + B3`

Diese Berechnungen können folgendermaßen umgesetzt werden:

Nach der Definition der Zellen `A1`, `A2`, `C1` und `C2` kann

[=] [abc] [⇧] [C] [1] [−] [A] [1] [EXE] (Definition der Zelle `B1` durch `C1-A1`)

notiert werden, vgl. Abbildung 1. Analog wird `B2` berechnet. In Zelle `A3` wird

[=] [abc] [⇧] [A] [1] [+] [A] [2] [EXE] (Definition der Zelle `A3` durch `A1+A2`)

eingegeben. Die Berechnungen der Zellen `B3` und `C3` werden analog durchgeführt, wie in Abbildung 1 zu sehen ist.

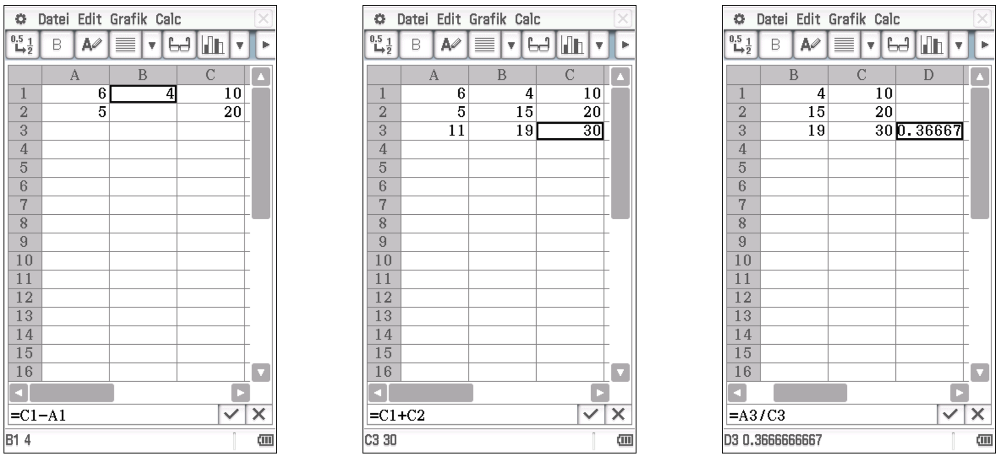


Abbildung 1: Schritte in Beispiel 2

Das tabellarische Diagramm sieht nun folgendermaßen aus:

	L	**G**	$\sum$
J	6	4	10
M	5	15	20
$\sum$	11	19	30

Eine Person dieser Stufe wird ausgelost. Es kann ein Mädchen oder ein Junge sein. Im nächsten Schritt wird untersucht, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Person einen Mathematik-Leistungskurs hat.

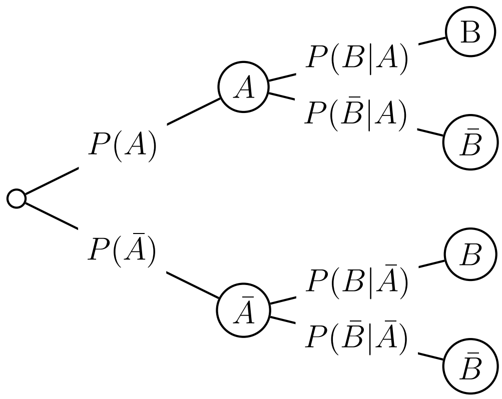
Diese Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der obigen Tabelle berechnet werden. Dazu ist die Summe der Schüler, die einen Leistungskurs gewählt haben, durch die Gesamtzahl der Schüler zu dividieren.

[=] [abc] [↑] [A] [3] [÷] [C] [3] [EXE]

(Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler einen Mathematik-Leistungskurs hat)

Das Ergebnis sehen Sie in Abbildung 1, rechts.

Lösung von Beispiel 3. Es ergibt sich das folgende Baumdiagramm:



Mithilfe des Baumdiagramms ergibt sich die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B bzgl. einer Zerlegung von Ω in die Ereignisse A und $\bar{A}$:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}).$$

Hiermit und mit der Multiplikationsregel folgt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}.$$

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich $P(A) = \frac{17}{20} = 0{,}85$ und $P(\bar{A}) = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Falls A eintritt, bleiben 16 brauchbare Werkzeuge übrig. Damit gilt $P(B|A) = \frac{16}{19}$. Falls $\bar{A}$ eintritt, bleiben 17 brauchbare und 2 fehlerhafte übrig, also $P(B|\bar{A}) = \frac{17}{19}$. Setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man

$$P(A|B) = \frac{16}{19}.$$